【解　説】

減圧理論における拡散方程式の二つの解の意味するところ

芦田　廣[1)]，池田　知純[2)]
防衛医科大学校[1)]
東京慈恵会医科大学　環境保健医学講座[2)]

キーワード　ルート解，級数解，境界条件，溢れだしガス，減圧症

【Exposition】
The meaning of the two solutions of diffusion equation in decompression theory

Hiroshi Ashida[1)] and Tomosumi Ikeda[2)]
1) National Defense Medical College
2) The Jikei University School of Medicine, Department of Public Health and Environmental Medicine

keywords　square root solution, series solution, boundary condition, spillover gas, decompression sickness

【はじめに】

潜水において，減圧症に罹患することなく効率的に浮上するための減圧スケジュールを求める主な演繹的減圧理論には，米海軍を中心として発達してきた灌流モデルに基づく古典的なアプローチと，それに並ぶ重要なモデルとしての英海軍のHemplemanらによる拡散モデル[1)]に基づく取り組みがある。

この拡散モデルによる減圧理論は実際の減圧表として広く供用され，それなりの信用を得ているが，そこに用いられてきた数式が灌流モデルに比し難解なこともあってか，邦文はもちろん英文によってもその理論構成が必ずしも広く明解に提示されてこなかった経緯がある。

そこで我々は拡散モデルによる減圧理論の展開をあらためて詳しく検証し，高卒レベルの数学でも理解可能なように記述した総説を2000年に本誌に発表した[2)]。その結果，拡散モデルをあらわす数式として，ルートモデルと級数モデルという表式は全く異なる二つの数式に基づくアプローチがあることを明らかにしたが，両者の関係については必ずしも十分には解明できていなかった。ルートモデルでは不活性ガスの取り込みが時間の平方根に比例して増加するため無限大に拡散するのに対し，級数モデルでは飽和状態に収束するという根本的な違いがあるにも拘わらず，曝露圧力が変化してからの経過時間がおよそ100分以内の比較的短い時間内では，両者の間にほとんど相違がない。然しながら，それが何故なのか明解な説明がなされていなかったのが実情である。欧米の減圧理論をリードしてきた人々の間でも，両者の一致が単にparameter fittingによる偶然の一致に過ぎない，という見方もあったのである（私信）。

我々は2005年に，ある条件を設定すれば，両者の一致が単に偶然の一致ではなく，数学的に必然であることを明らかにし発表したが，発表媒体が英文であることと内容が数学的分析を含んでいることから，我が国ではほとんど知られていないのが現状である[3)]。そこで，あらためて特別に専門的な数学的知識を有していない潜水関係者にも拡散モデルの枢要点を理解できるようにまとめてみた。併せて生理学的問題に対する数学的アプローチの美しさも理解していただけれ

防衛医科大学校　〒359-8513　埼玉県所沢市並木3-2
受領日／2018年5月17日　受理日／2018年6月7日

ば幸いである。

なお数学的な詳細，とりわけ拡散方程式の解法やパラメータ評価の過程等は別稿[2)]に詳しく記しているので，そちらを参照して頂きたい。

【拡散方程式とその解】

Hemplemanらの減圧理論は単一組織拡散モデルに基づいている。このモデルでは不活性ガスが1次元の拡散方程式

$$［1］\quad \frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2}$$

に従って単一組織内を拡散して行くと考える。ここで$c(x,t)$は時刻t，場所xでの不活性ガスの濃度であり，Dは拡散定数である。この一次元の拡散方程式を，時刻$t=0$での不活性ガスの分布を決める初期条件と，着目している領域の端・境界での不活性ガスの値を決める境界条件の下で解く事により，組織内の不活性ガスの時間経過が得られる。

【半無限条件での解】

図1のような半無限領域を考える。ここで，$x\geqq 0$の部分が組織で，$x<0$の部分が血管である。ここでは組織は無限の厚さを持つと考えている。組織は$x=0$で血管と接している。

血管内の不活性ガス濃度は一定値Cであるとし，時刻$t=0$に不活性ガス濃度が0であった組織に，その後，不活性ガスが拡散して行くと考える。

この状況の初期値・境界値条件は

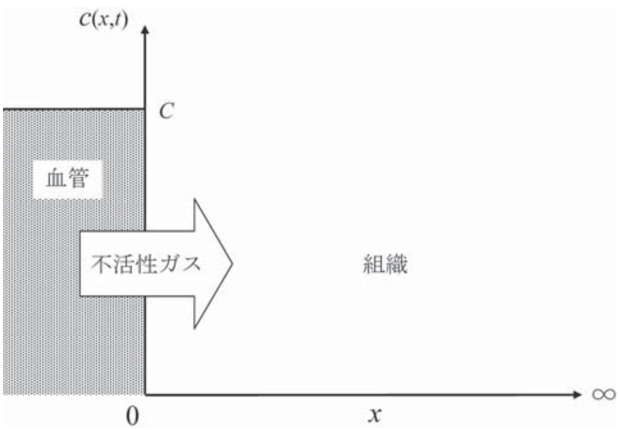

図1　半無限条件の模式図

初期条件　$0<x$の時　$c(x,0)=0$

境界条件　$0\leqq t$の時　$c(0,t)=C$：一定値

となる。この条件を満たす拡散方程式［1］の解は，

$$［2］\quad c(x,t) = C\left\{1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^Y \exp(-Z^2)dZ\right\}$$

ここで

$$［3］\quad Y = \frac{x}{2\sqrt{Dt}}$$

である。**図2**は式［2］を例示したものである。時間が経過してtが増大すると共に組織内の不活性ガス濃度が上昇して行く。

ある時刻tに組織内に存在する全不活性ガスの量$Q_1(t)$を求めよう。組織内のガスの濃度は［2］なので，［2］をxに関して［0, ∞］で積分すると

$$［4］\quad Q_1(t) = 2C\sqrt{\frac{D}{\pi}}\sqrt{t}$$

となる。

組織全体に存在する不活性ガスは全て，時刻$t=0$以降に血管と組織の境界面$x=0$を通って組織に流れ込んだものである。したがって時刻$t=0$以降に血管と組織の境界面$x=0$を通って流れ込んだガスの量を求めることによりQ_1を得ることもできる。実際［2］から流束Jは

$$［5］\quad J(x,t) = -D\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{CD}{2\sqrt{Dt}}\exp(-Y^2)$$
$$= C\sqrt{\frac{D}{\pi t}}\exp(-Y^2)$$

なので，境界面$x=0$を時間Tまでに流入したガスの量$Q_1(t)$は

$$［6］\quad Q_1(t) = \int_0^t J(0,\xi)d\xi = 2C\sqrt{\frac{D}{\pi}}\sqrt{t}$$

となり［4］と一致する。

これは，血管と接した組織が無限の厚さを持つと考えた場合の組織内のガスの量である。どの時刻においても組織内のどの点でも，ガスの濃度$c(x,t)$は血管

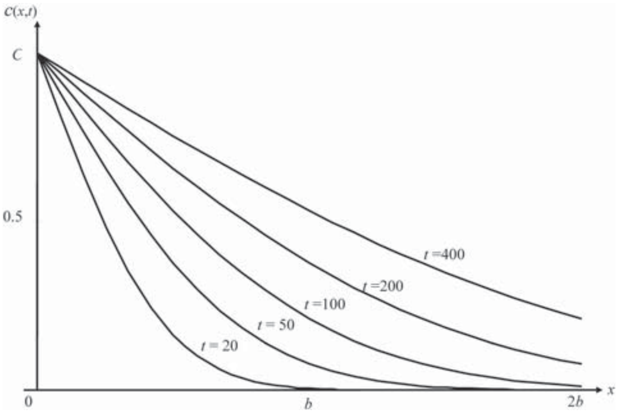

図2　種々の時刻における半無限条件での組織内不活性ガス濃度 $c\,(x,\,t)$

内のガスの濃度 C よりは小さい。しかし組織は無限の厚さを持つと考えているので，組織内のガスの全量 Q_1 は時間と共に無限に増大して行くことになる。

【有限条件での解】

厚さ $2b$ の組織が両側で血管に接している，すなわち厚さ $2b$ の組織が血管で挟まれている状況を考える（**図3**）。両側の血管は同等であり，組織も対称であると考えると，この条件では $x=b$ の両側で全く同じ過程が進み，両側は鏡像関係になっている。

この場合，血管内の不活性ガス濃度は両側とも一定値 C で，時刻 $t=0$ に不活性ガス濃度が 0 であった厚さ $2b$ の組織に，その後，不活性ガスが両側から拡散して行くと考える。

この状況での初期値・境界値条件は，

初期条件　$0<x<2b$ の時　$c\,(x,\,0)=0$

境界条件　$0\leqq t$ の時

$c\,(0,\,t)=c\,(2b,\,t)=C$：一定値

となる。この条件を満たす［1］の解は

$$[7]\quad c(x,t)=C\left\{1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\exp\left[-(\frac{(2n-1)\pi}{2b})^2 Dt\right]\cdot\sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{2b}x\right]\right\}$$

である。**図4**は［7］を例示したものである。時間が経過すると共に組織内のガス濃度は上昇して行く。組織は厚さが有限であり，この有限の領域でのガス濃度は半無限条件でのガス濃度と比べると，相対的に早く上

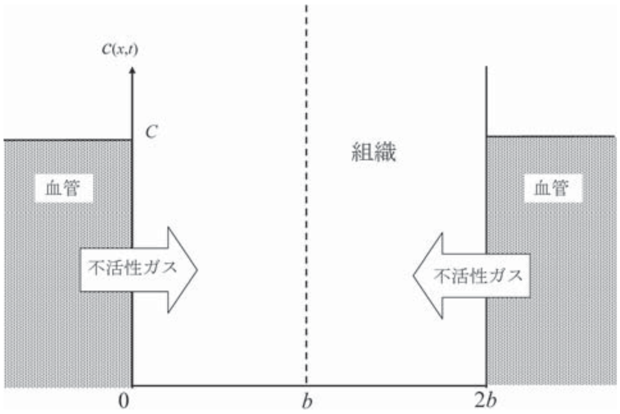

図3　有限条件の模式図

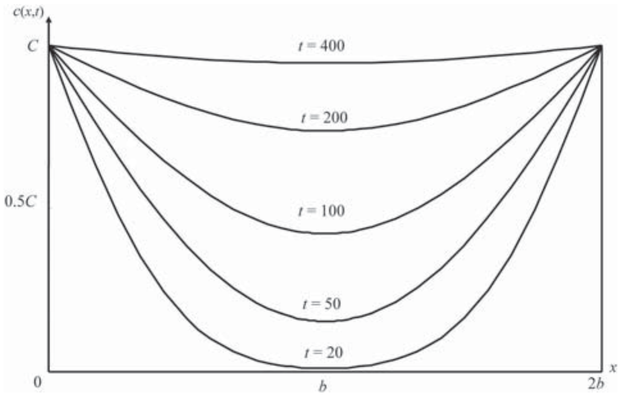

図4　種々の時刻おける有限条件での組織内不活性ガス濃度 $c\,(x,\,t)$

昇して行くことになる。

ある時刻 t に組織内に存在する全不活性ガスの量 $Q_2\,(t)$ を求める。濃度 $c\,(x,t)$ を x について［0, b］で積分すると，時刻 t に厚さ b の組織内に存在する全ガス量 $Q_2\,(t)$ になる。すなわち

$$[8]\quad Q_2(t)=\int_0^b c(x,t)dx=Cb\left\{1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot\exp\left[-(\frac{(2n-1)\pi}{2b})^2 Dt\right]\right\}$$

となる。ここで全ガス量 $Q_2(t)$ として［0, $2b$］ではなく，［0, b］の範囲のガスを計算していることに注意して欲しい。**図4**を見れば視覚的に明らかなように，［0, $2b$］のガス量は $Q_2\,(t)$ の2倍であるが，以降で着目する飽和度は［0, $2b$］で計算しても，［0, b］で計算しても同じである。

ガスの分布は$x=b$に関して対称になっていることを使えば，組織中の全不活性ガスの量$Q_2(t)$は$x=0$の面から組織に流入したガスの量から求めることもできる。［7］から$x=0$での流束を時間についてtまで積分すると

$$[9]\quad Q_2(t)=\int_0^t -D\frac{\partial c(x,\xi)}{\partial x}\Big|_{x=0}d\xi=-\frac{8Cb}{\pi^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}[\exp\{-(\frac{(2n-1)\pi}{2b})^2Dt\}-1]$$

となり，式の変形に注意すると［8］と一致することが分かる。

この場合，どの時点でも組織内のどの点でも，ガスの濃度$c(x,t)$はCより小さい。また組織の厚さは有限なので，時間が無限大になると，組織内のガスの濃度はどの点でも血管内と同じ濃度Cになる。実際,［7］で$t=\infty$にすると$c(x,t)=C$となる。また時間無限大での組織全体でのガスの量は［8］で$t=\infty$にすると$Q_2=Cb$，すなわち濃度と組織の厚さの積となる。

【パラメータ値の評価】

半無限条件での全ガス量Q_1と有限条件での全ガス量Q_2を数値的に評価することを考える。式［4］のQ_1には，拡散定数Dと血管でのガス濃度Cがパラメータとして含まれており，式［8］のQ_2には，拡散定数Dと血管でのガス濃度Cおよび組織の厚さbがパラメータとして含まれている。以下に，これらのパラメータの値をいくらと仮定するのかの概略を述べる。

Hemplemanは，100 ftに22分滞在した場合には安全であるから，半無限条件での全ガス量の関係［4］から，深さp ftではT分間安全である時の全ガス量については，比例定数を無視して

$$[10]\quad 100\times\sqrt{22}=p\times\sqrt{T}$$

が成り立つと考えた。すなわちp ftにT分滞在した時の全ガス量が100 ftに22分滞在した時の組織中の全ガス量と等しいならば安全であると考えたのである。［10］式から，47.5 ftに100分滞在した時や200 ftに5.6分滞在した時も安全であると計算した[注1]。

理想気体の状態方程式$pV=nRT$から（ここでpは圧力，Vは体積，nはモル数，Rはガス定数，Tは絶対温度），血管内の不活性ガスの濃度Cを求めると

$$C=\frac{n}{V}=\frac{p}{RT}$$

となるので，温度が一定の理想気体では濃度は圧力に比例する。［4］と［8］を見ると，組織内の全ガス量は血中のガス濃度Cに比例しており，理想気体を考えると血中ガス濃度Cは圧力に比例する。したがって組織の厚さbと拡散係数Dが圧力で変化しないと考えると，全ガス量は血中ガス濃度に比例し，血中ガス濃度は圧力に比例し，圧力すなわち水圧は深度に比例するので，結局，組織内の全ガス量は深度に比例することになる。詳細な理論的検討によると拡散係数Dは圧力に逆比例するが近似的には一定と見なしうる[4)]。必ずしも物理的，生理的に完全に示されたわけではないが，実際の減圧場面では全ガス量は深度に比例すると直感的に考えた[10]は，それなりに妥当であろう。

同じ考え方で有限条件での安全な飽和度sに関して

$$[11]\quad s=100\times Q_2(22)/Cb=47.5\times Q_2(100)/Cb=200\times Q_2(5.6)/Cb$$

が成り立つとして，HemplemanはQ_2の中の単一の未知パラメータの値を

$$[12]\quad k=(\frac{\pi}{2b})^2D=0.007928$$

と決めた。

実際には［11］は，二番目の等号で示される条件と三番目の等号で示される条件の2つの制約条件を意味しているので，［11］から一意的に［12］が導かれる訳ではない。未知のパラメータは1つで制約条件は2つであるから，一般的には制約条件［11］を完全に満たすパラメータは存在しない。それで制約条件［11］の値sから残差R

注1　Hemplemanは［10］の左辺の値を475とした。しかし［10］の左辺を正確に計算すると469.04であり，その結果，46.9 ftで100分滞在した時や200 ftに5.5分滞在した時も安全となる。

$$[13]\quad R = (100\times Q_2(22)/Cb-s)^2+(47.5\times Q_2(100)/Cb-s)^2+(200\times Q_2(5.6)/Cb-s)^2$$

を最小にするパラメータkとその時の安全飽和度sを最小二乗法を用いて求めると

$$[14]\quad \begin{aligned} k &= 0.00722697 \\ s &= 28.783 \\ R &= 0.0342 \end{aligned}$$

となる。一方，Hemplemanが求めた値は

$$[15]\quad \begin{aligned} k &= 0.007928 \\ s &= 30.1147 \\ R &= 0.0396519 \end{aligned}$$

である。［14］と［15］は少し値が異なるが，計算機がなかった時代に計算した値としては非常に良く一致している。以降は基本的にHemplemanの求めた値［15］に従って話を進める。

関係式［12］の左２項の関係を変形すると

$$[16]\quad \sqrt{\frac{D}{\pi}} = \sqrt{\frac{4kb^2}{\pi^3}} = \frac{2b}{\pi}\sqrt{\frac{k}{\pi}}$$

となるので，［4］の$Q_1(t)$と［8］の$Q_2(t)$をCbで割った飽和度は

$$[17]\quad \frac{Q_1(t)}{Cb} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{k}{\pi}}\sqrt{t} = 0.06396\sqrt{t}$$

$$[18]\quad \frac{Q_2(t)}{Cb} = 1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cdot\exp\left[-0.07928\times(2n-1)^2 t\right]$$

となる。［17］がHemplemanのルート関数解，すなわち半無限境界条件解であり，無限に発散する解である。一方，［18］が無限級数解，すなわち有限境界条件解であり，有限に収束する解である。ここで$k=0.007928$とした場合の，有限条件での飽和度Q_2/Cbと半無限条件でのQ_1/Cbは［17］，［18］式で結びついており，グラフ上で曲線を一致させるために恣意的にパラメータの値を決めたわけではないことを強調しておきたい。有限条件で$k=0.007928$を採用するなら，半無限条件では係数は必然的に0.06396となるのであり，逆も然りなのである。

この［12］の関係式を用いて，拡散定数Dをkに書き換えると，［3］は

$$[19]\quad Y = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} = \frac{\pi x}{4b\sqrt{kt}}$$

となる。したがって，距離xの代わりに，有限条件での組織の厚さbで正規化した距離x/bを変数として半無限条件での全ての関係式を記述することができる。有限条件の場合も同じように正規化した距離x/bを用いて全ての関係式を記述することができる。

【二つの解の関係】

このように，組織の厚さを無限大とみなした場合には，組織全体のガス量は時間の平方根に比例し，時間と共に無限大に発散する。一方，組織の厚さを有限と考えた場合には，組織全体のガスの量は無限級数で表現され，時間と共に増大して行くが組織内のガス濃度が血管内ガス濃度に等しくなったところで平衡状態になる。したがって組織全体のガス量も有限の値に収束する。この両者は，片方は単純な平方根，他方は複雑な無限級数であり，全く異なった表式である。

しかしこの両者は同じ拡散方程式を，一方は半無限境界条件で解き，他方は有限境界条件で解いたものに過ぎない。したがって有限境界条件の場合も，余り時間が経過していない時には，$x=b$の血管の中心まで拡散してきているガスの量が少いので，組織の厚さが無限の場合とほとんど同じ値を取る。時間が経つと共に，有限のところにある対面の血管の影響が出て来て，組織全体のガス量は有限の値に収束してゆく。こうして十分時間が経つと，組織の厚さを無限とみなす場合と，組織は有限の厚さを持つとする場合で，異なった様相を呈するようになる。

数学的には，余り時間が経っていない時には，半無限条件での解を$x=b$のところで折り返し，元の解に加算したものが，ほぼ有限条件での解に等しい。

この関係を**図5**で直観的に分かり易く説明する。

図5の各グラフにおいて，一番上の曲線は有限境界条件での不活性ガス濃度分布，その下の左から右に下がっている曲線は半無限境界条件で$x=0$から組織に流入した不活性ガス濃度分布，右から左に下がっている曲線（点線で表示）は半無限境界条件で$x=2b$から組織に流入した不活性ガス濃度分布である。

I_{50}は，$t=50$における，有限境界条件でのガス濃度曲線と左から右に流入する半無限境界条件でのガス濃度曲線で囲まれたxが［0，b］の間の領域である。I_{100}，I_{200}は，それぞれ$t=100$と200での同じ領域を示す。

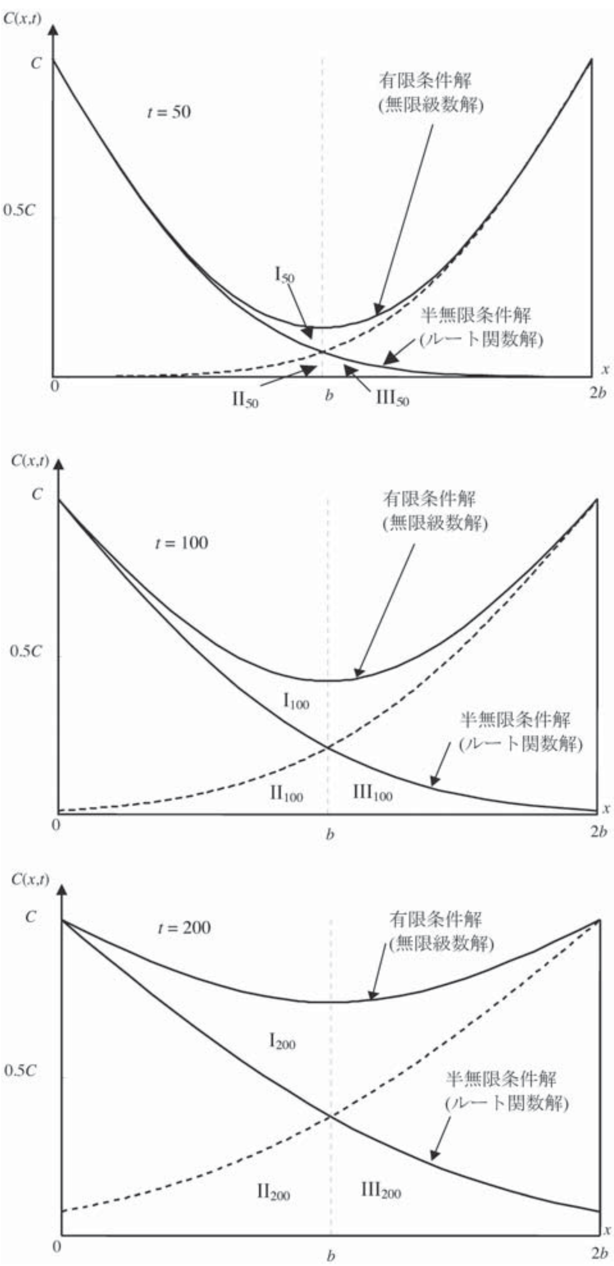

図5　各時刻における半無限条件解と有限条件解での組織内不活性ガス濃度 $c(x,\ t)$

II_{50}は，$t=50$における，$x=2b$から左に流入する半無限条件でのガス濃度曲線とx軸で囲まれた［0, b］の間の領域である。II_{100}，II_{200}は，それぞれ$t=100$と200での同じ領域を示す。

III_{50}は，$t=50$における，左から右に流入する半無限条件でのガス濃度曲線とx軸で囲まれた［b，$2b$］の間の領域である。III_{100}，III_{200}は，それぞれ$t=100$と200での同じ領域を示す。

前に述べたように，有限境界条件で，$x=0$の血管から右に流入するガスと，$x=2b$の血管から左に流入するガスは同じ量なので，領域IIと領域IIIの面積（すなわちガス量）は等しい。さらに時間が余り大きくない間は，有限境界条件でのガス量は，半無限境界条件で$x=0$の血管から右に流入するガスと，$x=2b$の血管から左に流入するガスの和とみなせるので，領域Iと領域IIの面積はほぼ等しいと見なせる。**図5**の上の二つ$t=50$，$t=100$では領域Iと領域IIの面積がほぼ等しいことが見て取れる。

しかし$x=0$も$x=2b$も反射壁ではないので，半無限条件で$x=2b$の壁から右へ溢れ出すガスは有限条件での解には算入されていない。この半無限条件で$x=2b$の壁から右へ溢れ出すガス量が十分小さい間は，半無限条件での全ガス量と有限条件での全ガス量はほとんど等しい。しかし時間が経って，この部分のガス量が大きくなって来ると両者の差が無視できなくなって来る。**図5**の最も下の$t=200$では，領域IIの$x=0$での切片も，領域IIIの$x=2b$での切片も明らかに0より大きく，領域Iの面積よりも領域IIや領域IIIの面積の方が大きくなっていることが見て取れるであろう。

半無限条件で$x=2b$の壁から右へ溢れ出したガスの量Q_3は，半無限条件でのルート解の$x>2b$の部分のガスの量であるから,［2］を$x>2b$の範囲で積分して，

$$[20]\quad Q_3=\int_{2b}^{\infty}c(x,t)dx$$

$$=4C\sqrt{\frac{Dt}{\pi}}\int_{B}^{\infty}(Z-B)\exp(-Z^2)dZ$$

となる。ここでBは$x=2b$の時の[19]のYの値であり,

$$B=\frac{b}{\sqrt{Dt}}=\frac{\pi}{2\sqrt{kt}}$$

である。

ただし数学的に厳密に言うならば，この半無限条件での$x>2b$の部分の溢れ出しガスの量Q_3が，半無限条件での全ガス量Q_1と有限条件での全ガス量Q_2との差に等しいわけではないことに気を付けて欲しい。半無限条件でのガス分布を$x=b$で折り返し加算したものが，有限条件でのガス分布に等しいわけでもない。十分時間が経つと，半無限条件でのガス分布は全領域でCbに近づく（$Cb/2$以上になる）ので，それを$x=b$で折り返して加えると，Cb以上になり有限条件でのガス分布を越える。経過時間が短く溢れ出しガスの量Q_3が比較的少ない間のみ，半無限条件でのガス分布を$x=b$で折り返し加算したものが，有限条件でのガス分布に近いのである。これらの時間経過が図6に示されている。

以上の考察から分かるように，より実体に近いのは組織の厚さが有限と考えた無限級数解であり，時間が余り経過していない時に限って組織の厚さを無限とみなした平方根の解も近似的に正しいということである。

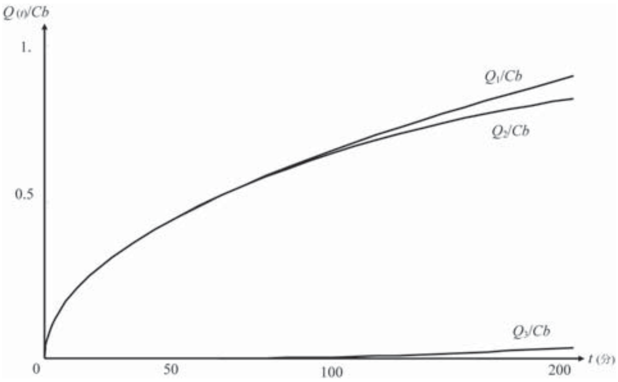

図6　半無限条件，有限条件での組織内不活性ガス飽和度，および溢れ出た不活性ガス飽和度の時間変化

【おわりに】

減圧理論における拡散モデルの二つの初期値・境界値条件での解を説明してきた。より生体の実情に近いのは無限級数で表現され，有限値に収束する有限境界値条件での解と言える。しかし実際に減圧症罹患を避けるための減圧スケジュールの理論的基盤としては，ルート解でも十分に実用になってきたのも現実である。

ルートモデルは計算が簡単なのに対して，無限級数モデルを用いた計算は厄介であると思われてきた。しかし高速の電子計算機が身近に使える現在では，無限級数モデルを用いた計算もかなり簡単に実行できる。その上，この無限級数は収束が極めて早く，実際に数値計算をしてみると直ぐに分かるように，せいぜい5項までの級数計算をすれば有効数字4桁程度の数値が得られる。メモリー付きの関数電卓で手計算もできる位である。

この基になっている一次元拡散方程式の限界も指摘しておきたい。より厳密詳細なモデルでは，3次元の拡散方程式を，分岐が存在する等の複雑な血管系を境界条件にして解くことになる。さらに拡散定数は圧力に反比例すると云う理論的考察もあり[4]，今の場合なら不活性ガス分子同士の衝突による相互作用を考慮するのが，より詳細なモデルになる。しかしそうした詳細モデルが減圧症の予防に有効かどうかは怪しい。そうした物理的な状況の精密化よりも，生体の生理的多様性や減圧環境のばらつきなどの方が遥に大きな影響を及ぼしているとも考えられる。また別項[5)]で指摘したように，こうした複雑な構造のモデルを構築しても，そこに含まれる多くのパラメータの値をどうして決めるかに大きな困難がある。

こうした多様でばらつく条件下での減圧スケジュールの作成には，AI（Artificial Intelligence，人工知能）によるビッグデータ処理の方が向いているとも考えられる。近年の計算機システムの急速な進歩により，ビッグデータの解析が，とにかく実用的に使えるデータを提示してくれるようになってきている。

【引用文献】

1）Hempleman HV: British decompression theory and practice. In: Bennett PB, Elliott DH, eds. The Physiology and Medicine of Diving and Compressed Air Work. London; Baillière Tindall, 1969; pp291-318.

2）池田知純，芦田廣：単一組織拡散モデルによる減圧理論の展開．日本高気圧環境医学会雑誌 2000; 35:131-146.

3）Ashida H, Ikeda T, Tikuisis P, Nishi RY: Relationship between two different functionos derived from diffusion-based decompression theory. Undesea Hyperb Med 2005; 32:429-435.

4）湯川秀樹，田村松平：物理學通論 上巻，増訂版．東京; 大明堂．1977; p469.

5）芦田廣：減圧理論における数理モデル．日本高気圧環境医学会雑誌 2005; 40:209-217.